Lecciones populares de matemáticas

SUCESIONES RECURRENTES

A. I. Markushévich

$$u_1 = a,\ a_2 = aq$$

$$u_3 = aq^2, \ldots, u_n = aq^{n+1}, \ldots;$$

$$u_{n+1} = qu_n$$

Editorial MIR Moscú

ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

А. И. МАРКУШЕВИЧ

ВОЗВРАТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«НАУКА»

LECCIONES POPULARES DE MATEMATICAS

A. I. MARKUSHEVICH

SUCESIONES RECURRENTES

TRADUCIDO DEL RUSO
POR CARLOS VEGA
Candidato a Doctor en Ciencias físico-matemáticas,
Catedrático de Matemáticas Superiores

Tercera edición

EDITORIAL MIR
MOSCU

A nuestros lectores:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés y árabe. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir» I Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

Primera edición 1974
Segunda edición 1981
Tercera edición 1986

IMPRESO EN LA URSS

На испанском языке

PREFACIO

Este libro es la exposición ampliada de la conferencia dictada por el autor primero a los alumnos de IX y X grados que participaron en la Olimpiada matemática de Moscú y después, con ciertos retoques, en el Instituto de perfeccionamiento pedagógico de Moscú.

El tema «Sucesiones recurrentes» es próximo al curso escolar (progresiones aritméticas y geométricas, sucesión de los cuadrados de los números naturales, sucesión de los coeficientes del cociente de dos polinomios escritos en el orden creciente de potencias, etc.). Al mismo tiempo es toda una pequeña teoría matemática [1]) acabada, simple y clara como todo cuanto nos llega de los grandes maestros del Análisis Matemático, autores de esta teoría.

Los fundamentos de la teoría de las sucesiones recurrentes fueron elaborados y publicados en la segunda década del siglo XVIII por el matemático francés Abraham de Moivre [lleva su nombre la fórmula $(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) = \cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha$] y por Daniel Bernoulli, matemático suizo y uno de los primeros miembros de la Academia de San Perersburgo. En cuanto a la teoría completa se debe a Leonardo Euler, el matemático más destacado del siglo XVIII y académico de San Petersburgo, que consagró a las sucesiones recurrentes (series) el capítulo trece de su «Introducción al análisis de las infenitésimas» (1748). Entre los trabajos posteriores cabe destacar la exposición de la teoría de las sucesiones recurrentes en los cursos del Cálculo de diferencias finitas dictados por los académicos P. T. Chébishev y A. A. Márkov [2]), famosos matemáticos rusos.

[1]) Para el lector familiarizado con el Análisis Matemático podemos señalar que esta teoría es el análogo exacto de la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

[2]) Véase П. Л. Чебышев, Теория вероятностей, лекции 1879—1880 гг. М. —Л., 1936, стр. 139—147 (P. L. Chébishev, Teoría de las probabilidades, conferencias de los años 1879 y 1880, páginas de 139 a 147) y А. А. Марков, Исчисление конечных разностей, 2-е изд., Одесса, 1910, стр. 209—239. (A. A. Márkov, Cálculo de diferencias finitas, páginas de 209 a 239).

1. El concepto de sucesión recurrente es una amplia generalización del concepto de progresión aritmética o geométrica. También comprende como casos particulares las sucesiones de cuadrados o cubos de los números naturales, las sucesiones de las cifras de la descomposición decimal de los números racionales (y, en general, todas las sucesiones periódicas), las sucesiones de los coeficientes del cociente que se obtiene al dividir dos polinomios cualesquiera escritos en el orden creciente de las potencias de x, etc. Por lo tanto, ya en el curso escolar de las Matemáticas tropezamos muy frecuentemente con las sucesiones recurrentes. La teoría de estas sucesiones es un capítulo de la disciplina matemática llamada *Cálculo de diferencias finitas.* Expondremos aquí esta teoría de manera que no exija del lector conocimientos especiales previos (sólo una vez nos referiremos, sin demostrarla, a una proposición general de la teoría de las ecuaciones algebraicas lineales).

2. Escribiremos las sucesiones en la forma

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots \qquad (1)$$

o brevemente $\{u_n\}$. Si existe un número natural k y unos números $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (reales o complejos) tales que desde un cierto número n y para todos los números siguientes se tiene

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n \qquad (n \geqslant m \geqslant 1), \qquad (2)$$

la sucesión (1) se llama *sucesión recurrente de orden k* y la relación (2), *ecuación recurrente de orden k.*

Por lo tanto, lo que caracteriza la sucesión recurrente es que todo término suyo (desde uno determinado) se expresa según la fórmula (2) mediante una misma cantidad k de términos anteriores. La palabra «recurrente» se emplea aquí precisamente porque para determinar el término posterior hay que recurrir a los anteriores. Veamos algunos ejemplos de sucesiones recurrentes.

Ejemplo 1. Progresión geométrica. Consideremos la progresión geométrica

$$u_1 = a, \quad u_2 = aq, \quad u_3 = aq^2, \; \ldots, \quad u_n = aq^{n-1}, \; \ldots; \tag{3}$$

en este caso la ecuación (2) da

$$u_{n+1} = qu_n. \tag{4}$$

Aquí $k = 1$ y $a_1 = q$. O sea, la progresión geométrica es una sucesión recurrente de *primer* orden.

Ejemplo 2. Progresión aritmética. En el caso de una progresión aritmética

$$u_1 = a, \quad u_2 = a + d, \quad u_3 = a + 2d, \; \ldots,$$
$$u_n = a + (n - 1)\, d, \; \ldots$$

tenemos

$$u_{n+1} = u_n + d,$$

o sea, una relación que no tiene el aspecto de la ecuación (2) [1]. Pero considerando dos relaciones correspondientes a dos valores sucesivos de n

$$u_{n+2} = u_{n+1} + d \quad \text{y} \quad u_{n+1} = u_n + d$$

y restándolas miembro a miembro, obtenemos

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n,$$

es decir,

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \tag{5}$$

que es una ecuación de tipo (2). Aquí $k = 2$, $a_1 = 2$ y $a_2 = -1$. Por lo tanto, la progresión aritmética es una sucesión recurrente de segundo orden.

---

[1] Lo que caracteriza esta ecuación es que en su segundo miembro figuran, con coeficientes constantes, sólo términos de la sucesión,

Ejemplo 3. Consideremos el antiguo problema de Fibonacci [1]) sobre el número de conejos. Se precisa determinar el número de parejas de conejos adultos resultantes de una pareja durante un año si cada pareja adulta produce mensualmente una pareja nueva y los recién nacidos alcanzan la plena madurez en el curso de un mes. Lo que interesa en este problema no es el resultado, que es fácil de encontrar, sino la sucesión cuyos términos determinan el número total de parejas adultas en el momento inicial (u_1), al cabo de un mes (u_2), al cabo de dos meses (u_3) y, en general, al cabo de n meses (u_{n+1}). Es obvio que $u_1 = 1$. Pasado un mes, se sumará una pareja recién nacida pero el número de parejas adultas seguirá siendo el mismo: $u_2 = 1$. Al cabo de dos meses los gazapos alcanzarán la madurez y el número total de parejas adultas será dos: $u_3 = 2$. Supongamos que u_n es el número de parejas adultas al cabo de $n - 1$ meses y que u_{n+1} es el número de parejas adultas al cabo de n meses. Como quiera que las u_n parejas adultas existentes producirán u_n parejas, al cabo de $n + 1$ meses el número total de parejas adultas será

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n. \tag{6}$$

Por eso,

$$u_4 = u_3 + u_2 = 3, \quad u_5 = u_4 + u_3 = 5,$$
$$u_6 = u_5 + u_4 = 8, \quad u_7 = u_6 + u_5 = 13, \ldots$$

Hemos obtenido así la sucesión

$$\left.\begin{array}{c} u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ u_3 = 2,\ u_4 = 3,\ u_5 = 5, \\ u_6 = 8,\ u_7 = 13,\ \ldots \end{array}\right\} \tag{7}$$

en la que todo término siguiente es igual a la suma de los dos anteriores. Esta sucesión se denomina *sucesión de Fibonacci* y sus términos se llaman *números de Fibonacci*. De la ecuación (6) resulta que la sucesión de Fibonacci es una sucesión recurrente de segundo orden.

[1]) Fibonacci o Leonardo de Pisa, matemático italiano de la edad media (vivió hacia el año 1228), escribió el «Libro del ábaco» (Liber abaci). Contiene amplios conocimientos de Aritmética y Algebra que Fibonacci tomó de los pueblos de Asia Central y de los bizantinos, elaborándolos y desarrollándolos creadoramente.

Ejemplo 4. Para el ejemplo siguiente tomemos la sucesión de los cuadrados de los números naturales

$$u_1 = 1^2,\ u_2 = 2^2,\ u_3 = 3^2,\ \ldots,\ u_n = n^2,\ \ldots \tag{8}$$

Aquí $u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ y, por lo tanto,

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1. \tag{9}$$

Aumentando n en uno, obtenemos

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2n + 3. \tag{10}$$

Por consiguiente, [restando miembro a miembro (9) de (10)], encontramos

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 2,$$

o sea,

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2. \tag{11}$$

Aumentando n en uno en la igualdad (11), tendremos

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2, \tag{12}$$

de donde [restando miembro a miembro (11) de (12)]

$$u_{n+3} - u_{n+2} = 2u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n,$$

es decir,

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n. \tag{13}$$

Hemos obtenido una ecuación recurrente de **tercer** orden. Por lo tanto, la sucesión (8) es una sucesión recurrente de **tercer** orden. Análogamente se puede probar que la sucesión de los cubos de los números naturales

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ \ldots,\ n^3,\ \ldots \tag{14}$$

es una sucesión recurrente de **cuarto** orden. Sus términos verifican la ecuación

$$u_{n+4} = 4u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_n; \tag{15}$$

proponemos al lector deducirla.

Ejemplo 5. Todas las sucesiones periódicas son recurrentes. Consideremos, por ejemplo, la sucesión formada por las cifras de la descomposición decimal del número

$$\frac{761}{1332} = 0{,}57132132132\ldots$$

En esto caso

$$\left.\begin{array}{c} u_1 = 5,\ u_2 = 7,\ u_3 = 1,\ u_4 = 3,\ u_5 = 2, \\ u_6 = 1,\ u_7 = 3,\ \ldots \end{array}\right\} \qquad (16)$$

Es evidente que

$$u_{n+3} = u_n \quad (n \geqslant 3). \qquad (17)$$

Para dar a esta ecuación la forma (2), escribámosla así

$$u_{n+3} = 0 \cdot u_{n+2} + 0 \cdot u_{n+1} + 1 \cdot u_n.$$

De aquí resulta que se tiene una sucesión recurrente de tercer orden ($k = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ y $a_3 = 1$). Por consiguiente, la sucesión (16) es una sucesión recurrente de tercer orden.

Ejemplo 6. Consideremos ahora la sucesión de los coeficientes del cociente que se obtiene al dividir dos polinomios escritos en el orden creciente de x. Sean

$$P(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_l x^l$$

y

$$Q(x) = B_0 + B_1 x + \ldots + B_k x^k \quad (B_0 \neq 0)$$

dos polinomios.

Dividamos $P(x)$ entre $Q(x)$; si la división no es exacta, puede ser prolongada indefinidamente. En el cociente aparecerán sucesivamente los términos

$$D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + D_3 x^3 + \ldots + D_n x^n + \ldots$$

Consideremos la sucesión

$$u_1 = D_0,\ u_2 = D_1,\ \ldots,\ u_n = D_{n-1},\ \ldots \qquad (18)$$

y demostremos que es una sucesión recurrente de orden k (recordemos que k es el grado del divisor). Para ello, fijemos un número natural cualquiera n que responda a la única condición $n \geqslant l - k + 1$ y detengámonos en el proceso de división en el término del cociente que contiene x^{n+k}. El resto será entonces un polinomio $R(x)$ que contiene x en potencia mayor que $n + k$. Considerando la relación entre el dividiendo, el divisor, el cociente y el resto, obtenemos la identidad siguiente

$$A_0 + \ldots + A_l x^l = (B_0 + \ldots + B_k x^k) \times$$
$$\times (D_0 + \ldots + D_{n+k} x^{n+k}) + R(x).$$

Determinemos los coeficientes de x^{n+k} en ambos miembros de esta identidad e igualémoslos. Puesto que $n + k \geqslant l + 1$, el coeficiente de x^{n+k} en el primer miembro es igual a cero. Luego, también debe ser igual a cero el coeficiente de x^{n+k} en el segundo miembro. Pero los términos que contienen x^{n+k} sólo aparecen aquí en el producto $(B_0 + \ldots + B_k x^k) \cdot (D_0 + \ldots + D_{n+k} x^{n+k})$ [porque el resto $R(x)$, como hemos explicado, contiene x en potencias mayores]. Es decir, para el coeficiente buscado tenemos

$$D_{n+k}B_0 + D_{n+k-1}B_1 + \ldots + D_n B_k; \tag{19}$$

según hemos señalado, tiene que ser igual a cero:

$$D_{n+k}B_0 + D_{n+k-1}B_1 + \ldots + D_n B_k = 0,$$

de donde (recordando que $B_0 \neq 0$) encontramos

$$D_{n+k} = -\frac{B_1}{B_0} D_{n+k-1} - \ldots - \frac{B_k}{B_0} D_n \quad (n \geqslant l - k + 1). \tag{20}$$

Tenemos una ecuación recurrente de **orden** k y, por eso, la sucesión (18) es una sucesión recurrente de **orden** k.

3. El ejemplo 6 es, entre los considerados, el de carácter más general. Demostremos que *cualquier sucesión recurrente de orden* k

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \tag{21}$$

que satisface la ecuación

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \ldots + a_k u_n \quad (n \geqslant m \geqslant 1) \tag{22}$$

coincide con la sucesión de los coeficientes del cociente que se obtiene al dividir un polinomio $P(x)$ *entre el polinomio*

$$Q(x) = 1 - a_1 x - \ldots - a_k x^k. \tag{23}$$

Sea n un número natural cualquiera que responde a la única condición $n > k + m - 2$; multipliquemos el polinomio $Q(x)$ por $u_1 + u_2 x + u_3 x^2 + \ldots + u_{n+1} x^n$. Tendremos

$$\begin{aligned}
&(1 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_k x^k)(u_1 + u_2 x + \ldots \\
&\qquad \ldots + u_{k+m-1} x^{k+m-2} + \ldots + u_{n+1} x^n) = \\
&= [u_1 + (u_2 - a_1 u_1) x + \ldots + (u_{k+m-1} - a_1 u_{k+m-2} - \ldots \\
&\quad \ldots - a_k u_{m-1}) x^{k+m-2}] + [(u_{k+m} - a_1 u_{k+m-1} - \ldots - a_k u_m) \times \\
&\quad \times x^{k+m-1} + \ldots + (u_{n+1} - a_1 u_n - \ldots - a_k u_{n-k+1}) x^n] - \\
&\quad - [(a_1 u_{n+1} + \ldots + a_k u_{n-k+2}) x^{n+1} + \ldots + a_k u_{n+1} x^{n+k}].
\end{aligned} \tag{24}$$

En el primer corchete figura un polinomio de grado no mayor que $l = k + m - 2$ y sus coeficientes no dependen del número n; indiquemos este polinomio por $P(x)$:

$$P(x) = u_1 + (u_2 - a_1 u_1) x + \dots$$
$$\dots + (u_{k+m-1} - a_1 u_{k+m-2} - \dots - a_k u_{m-1}) x^{k+m-2}. \quad (25)$$

Los coeficientes del polinomio que figura en el corchete siguiente son todos iguales a cero en virtud de la igualdad (22). Finalmente, en el último corchete figura un polinomio cuyos coeficientes dependen de n; no contiene términos de potencias menores que $n + 1$. Indicándolo por $R_n(x)$, podemos escribir la identidad (24) así:

$$P(x) = (1 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots$$
$$\dots - a_k x^k)(u_1 + u_2 x + \dots + u_{n+1} x^n) + R_n(x). \quad (26)$$

Vemos, pues, que $u_1 + u_2 x + \dots + u_{n+1} x^n$ es el cociente y que $R_n(x)$ es el resto de la división de $P(x)$ entre

$$Q(x) = 1 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_k x^k,$$

o sea,

$$u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$$

es, en efecto, la sucesión de los coeficientes del cociente que se obtiene al dividir el polinomio (25) entre el polinomio (23).

A título de ejemplo, consideremos la sucesión de Fibonacci

$$u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ u_3 = 2,\ u_4 = 3,\ u_5 = 5,\ \dots$$

Sus términos verifican la ecuación

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (n \geqslant 1)$$

y, por eso, tenemos en este caso $m = 1$, $k = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $Q(x) = 1 - x - x^2$.

El grado del polinomio $P(x)$ debe ser $k + m - 2 = 1$ todo lo más. Aplicando la fórmula (25), encontramos

$$P(x) = 1 + (1 - 1 \cdot 1)x = 1.$$

Es decir, los números de Fibonacci coinciden con la sucesión de los coeficientes del cociente que se obtiene al dividir 1 entre $1 - x - x^2$.

4. Uno de los problemas que se plantea en el curso escolar en relación con las progresiones aritmética y geométrica, así como en relación con las sucesiones de los cuadrados de los números naturales, consiste en determinar la suma de n términos de cada una de estas sucesiones.

Supongamos, en general, que

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \tag{27}$$

es una sucesión recurrente de orden k cuyos términos verifican la ecuación

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n \quad (n \geqslant m). \tag{28}$$

Consideremos una sucesión nueva formada por las sumas s_n de los números (27):

$$s_1 = u_1, \ s_2 = u_1 + u_2, \ \ldots, \ s_n = u_1 + u_2 + \ldots \\ \ldots + u_n, \ \ldots \tag{29}$$

y demostremos que también es una sucesión recurrente de orden $k+1$ con la particularidad de que sus términos verifican la ecuación

$$s_{n+k+1} = (1 + a_1) s_{n+k} + \\ + (a_2 - a_1) s_{n+k-1} + \ldots + (a_k - a_{k-1}) s_{n+1} - a_k s_n. \tag{30}$$

Para demostrarlo, observemos que

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = s_1, \ u_2 = s_2 - u_1 = s_2 - s_1, \ \ldots \\ \ldots, \ u_n = s_n - (u_1 + \ldots + u_{n-1}) = s_n - s_{n-1}, \ \ldots \end{array}\right\} \tag{31}$$

Tomando $s_0 = 0$ de modo que sea $u_1 = s_1 - s_0$ e introduciendo en la ecuación (28) en lugar de $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ sus expresiones en términos de $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$, obtenemos

$$s_{n+k} - s_{n+k-1} = a_1 (s_{n+k-1} - s_{n+k-2}) + \\ + a_2 (s_{n+k-2} - s_{n+k-3}) + \ldots + a_k (s_n - s_{n-1}),$$

de donde

$$s_{n+k} = (1 + a_1) s_{n+k-1} + \\ + (a_2 - a_1) s_{n+k-2} + \ldots + (a_k - a_{k-1}) s_n - a_k s_{n-1} \ (n \geqslant m),$$

o, cambiando n por $n+1$,

$$s_{n+k+1} = (1 + a_1)\, s_{n+k} + (a_2 - a_1)\, s_{n+k-1} + \dots$$
$$\dots + (a_k - a_{k-1})\, s_{n+1} - a_k s_n \quad (n \geqslant m - 1).$$

Hemos obtenido una ecuación recurrente de orden $k + 1$.

Veamos algunos ejemplos.

a) **Progresión geométrica.** En este caso, $u_n = aq^{n-1}$ y $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = a + aq + \dots + aq^{n-1}$. Puesto que los términos de la sucesión $\{u_n\}$ verifican la ecuación $u_{n+1} = qu_n$, los términos de la sucesión $\{s_n\}$ deben satisfacer la ecuación

$$s_{n+2} = (1 + q)\, s_{n+1} - qs_n. \tag{32}$$

b) **Sucesión de los cuadrados de los números naturales.** En este caso, $u_n = n^2$ y $s_n = 1 + 2^2 + \dots + n^2$. Los términos de la sucesión $\{u_n\}$ verifican la ecuación

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$$

(véase la página 10) y, por eso, los términos de la sucesión $\{s_n\}$ satisfacen la ecuación

$$s_{n+4} = 4s_{n+3} - 6s_{n+2} + 4s_{n+1} - s_n.$$

c) **Números de Fibonacci.** Estos números verifican la ecuación

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

y, por lo tanto, sus sumas s_n deben satisfacer la ecuación

$$s_{n+3} = 2s_{n+2} - s_n.$$

5. En el caso de las sucesiones recurrentes elementales (como son las progresiones aritmética y geométrica, las sucesiones de los cuadrados o cubos de los números naturales y la sucesión periódica) podemos determinar cualquier término de la sucesión sin calcular los término anteriores. En el caso de la sucesión de los números de Fibonacci o de la sucesión general de los coeficientes del cociente que se obtiene al dividir dos polinomios parece, a primera vista, que no existe tal posibilidad y que para calcular el décimotercero número de Fibonacci u_{13} tendremos que determinar

previamente, uno tras otro, todos los términos anteriores (valiéndonos de la ecuación $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$):

$$u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ u_3 = 2,\ u_4 = 3,\ u_5 = 5,\ u_6 = 8,$$
$$u_7 = 13,\ u_8 = 21,\ u_9 = 34,\ u_{10} = 55,\ u_{11} = 89,$$
$$u_{12} = 144,\ u_{13} = 233.$$

Ocupémonos ahora del análisis detallado de la estructura de los términos de una sucesión recurrente con el fin de obtener las fórmulas que permitan determinar, en el caso más general, cualquier término de la sucesión recurrente sin calcular los términos anteriores. Estas fórmulas pueden ser consideradas como una generalización muy profunda de las fórmulas correspondientes a los términos generales de una progresión aritmética o geométrica.

Sea

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n \tag{33}$$

una ecuación recurrente de orden k. Si es válida para todos los valores naturales $n = 1, 2, 3, \ldots$, tendremos tomando $n = 1$

$$u_{k+1} = a_1 u_k + a_2 u_{k-1} + \ldots + a_k u_1.$$

Es decir, conociendo $u_1, u_2, \ldots, u_k$ podemos calcular u_{k+1}. Tomando ahora $n = 2$ en la ecuación (33), encontramos

$$u_{k+2} = a_1 u_{k+1} + a_2 u_k + \ldots + a_k u_2.$$

Por lo tanto, también conocemos ahora el valor de u_{k+2}. En general, si m es un número natural cualquiera y si hemos calculado ya los términos

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_k,\ u_{k+1},\ \ldots,\ u_{m+k-1},$$

podemos determinar de la ecuación (33) el término siguiente u_{m+k} tomando en ella $n = m$.

Es decir, los términos de una sucesión recurrente de orden k que verifican la ecuación (33) se determinan unívocamente mediante esta ecuación siempre que se conozcan los k términos primeros $u_1, u_2, \ldots, u_k$ de la sucesión. Escogiendo estos últimos de distintos modos (esta elección no está sujeta a restricción alguna), podemos obtener un conjunto infinito de distintas sucesiones que verifican la ecuación (33). Diferirán una de otra ya en los primeros k

términos (al menos en uno de ellos) y en todos los términos sucesivos.

Por ejemplo, a la ecuación de primer orden

$$u_{n+1} = qu_n$$

satisfacen todas las progresiones geométricas de razón q (que difieren una de otra en el valor del primer término u_1); a la ecuación de segundo orden

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$$

(o $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$) satisfacen todas las progresiones aritméticas que difieren al menos en uno de los términos $u_1 = a$ ó $u_2 = a + d$, o sea, que difieren en el primer término (a), en el valor de la diferencia (d) o tanto en uno como en el otro.

Consideremos, además, la ecuación de segundo orden

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Le satisface (además de la sucesión de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, . . . que se caracteriza por ser $u_1 = u_2 = 1$) un conjunto infinito de sucesiones que se obtienen al escoger de diferentes modos los valores de u_1 y u_2. Por ejemplo, si $u_1 = -3$ y $u_2 = 1$, obtenemos la sucesión

$$-3,\ 1,\ -2,\ -1,\ -3,\ -4,\ -7,\ -11,\ -18,\ -29\ \ldots$$

Supongamos que se tiene cierta cantidad de sucesiones

$$\left.\begin{array}{l} x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots, \\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots \end{array}\right\} \qquad (34)$$

que verifican todas ellas la misma ecuación (33). Entonces son válidas las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+k} = a_1x_{n+k-1} + a_2x_{n+k-2} + \ldots + a_kx_n, \\ y_{n+k} = a_1y_{n+k-1} + a_2y_{n+k-2} + \ldots + a_ky_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{n+k} = a_1z_{n+k-1} + a_2z_{n+k-2} + \ldots + a_kz_n \end{array}\right\} \qquad (35)$$

Tomemos unos números arbitrarios A, B, . . ., C en la misma cantidad que las sucesiones (34), multipliquemos por A todos los términos de la primera ecuación (35), por B los de la segunda, ..., por C los de la última y sumemos las ecuaciones así obtenidas. Obtendremos la igualdad

$$\begin{aligned} Ax_{n+k} + By_{n+k} + \ldots + Cz_{n+k} = \\ = a_1(Ax_{n+k-1} + By_{n+k-1} + \ldots + Cz_{n+k-1}) + \\ + a_2(Ax_{n+k-2} + By_{n+k-2} + \ldots + Cz_{n+k-2}) + \ldots \\ \ldots + a_k(Ax_n + By_n + \ldots + Cz_n). \quad (36) \end{aligned}$$

De ella resulta que a la ecaución (33) le satisface la sucesión

$$\left.\begin{array}{l} t_1 = Ax_1 + By_1 + \ldots + Cz_1, \\ t_2 = Ax_2 + By_2 + \ldots + Cz_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_n = Ax_n + By_n + \ldots + Cz_n, \end{array}\right\} \quad (37)$$

que se obtiene de las sucesiones (34) multiplicando todos los términos de la primera por A, todos los términos de la segunda por B, . . ., todos los términos de la última por C y sumando término por término (los primeros con los primeros, los segundos con los segundos, etc.) las sucesiones obtenidas. Puesto que la elección de los números A, B, ..., C es arbitraria, podemos variando estos números obtener, en general, diferentes valores para los términos t_1, t_2, t_3, . . .

Supongamos ahora que

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \quad (38)$$

es una sucesión que verifica la ecuación (33); ¿pueden escogerse los números A, B, . . ., C de modo que los k primeros términos de la sucesión (37) coincidan con los k primeros términos de la sucesión (38)? Si esto es posible, también coincidirán, según hemos explicado, todos los demás términos de las sucesiones (37) y (38), o sea, para todo, número natural n tendremos

$$u_n = Ax_n + By_n + \ldots + Cz_n. \quad (39)$$

Por lo tanto, se tiene la posibilidad (por ahora hipotética) de expresar mediante la fórmula (39) toda del conjunto infinito de las sucesiones, que verifican una misma ecuación recurrente de orden k, a través de ciertas sucesiones (34) de ellas. Esta posibilidad depende de si podemos o no determinar los números $A, B, \ldots, C$ de modo que se verifiquen las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} Ax_1 + By_1 + \ldots + Cz_1 = u_1, \\ Ax_2 + By_2 + \ldots + Cz_2 = u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ax_k + By_k + \ldots + Cz_k = u_k, \end{array}\right\} \qquad (40)$$

donde los segundos miembros $u_1, u_2, \ldots, u_n$ son unos números arbitrarios dados.

Las incógnitas en este caso son los números $A, B, \ldots, C$; puesto que el número de ecuaciones es igual al orden k de la ecuación recurrente, lo lógico es aceptar que el número de las incógnitas $A, B, \ldots, C$ es también k [o sea, que coincide con la cantidad de las sucesiones (34)]. Como es sabido, el sistema de k ecuaciones algebraicas (40) con k incógnitas $A, B, \ldots, C$ puede tener o no tener soluciones según los valores que tomen los coeficientes de este sistema $x_1, y_1, \ldots, z_1, \ldots, x_k, y_k, \ldots, z_k$, o sea, según los valores que tomen los términos iniciales de las sucesiones (34). Indudablemente habrá solución, cualesquiera que sean los segundos miembros $u_1, u_2, \ldots, u_k$, si tomamos, por ejemplo,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1,\ y_1 = 0,\ \ldots,\ z_1 = 0; \\ x_2 = 0,\ y_2 = 1,\ \ldots,\ z_2 = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k = 0,\ y_k = 0,\ \ldots,\ z_k = 1. \end{array}\right\} \qquad (41)$$

Efectivamente, el sistema (40) tiene en este caso la forma elemental que permite inmediatamente determinar la solución:

$$\left.\begin{array}{l} A = u_1, \\ B = u_2, \\ \ldots\ldots \\ C = u_k. \end{array}\right\}$$

Existen, por supuesto, otros modos de escoger los números

$$x_1, \ldots, z_1, \ldots, x_k, \ldots, z_k$$

de forma que el sistema (40) tenga solución cualesquiera que sean sus segundos miembros. Tomemos, por ejemplo,

$$\left.\begin{array}{l} x_1=1,\ y_1=1,\ \ldots,\ z_1=1\,; \\ x_2=0,\ y_2=1,\ \ldots,\ z_2=1\,; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k=0,\ y_k=0,\ \ldots,\ z_k=1. \end{array}\right\} \qquad (42)$$

En este caso el sistema será de la forma

$$\left.\begin{array}{r} A+B+\ldots+C=u_1, \\ B+\ldots+C=u_2, \\ \cdots\cdots \\ C=u_k, \end{array}\right\}$$

de donde obtenemos sucesivamente

$$C=u_k,\ \ldots,\ B=u_2-u_3,\ A=u_1-u_2.$$

Volviendo al caso general enunciaremos el teorema siguiente:

Para que el sistema (40) de k ecuaciones algebraicas lineales con k incógnitas tenga una solución única $A, B, \ldots, C$ cualesquiera que sean los valores $u_1, u_2, \ldots, u_k$ de los segundos miembros, es necesario y suficiente que el sistema homogéneo correspondiente

$$\left.\begin{array}{l} Ax_1+By_1+\ldots+Cz_1=0, \\ Ax_2+By_2+\ldots+Cz_2=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Ax_k+By_k+\ldots+Cz_k=0 \end{array}\right\} \qquad (40')$$

tenga solamente la solución nula [1]):

$$A=B=\ldots=C=0.$$

[1]) Esta proposición es cómoda en las aplicaciones, pues no exige el conocimiento de la teoría de los determinantes. Para el lector familiarizado con esta teoría recordaremos que para la existencia de una solución del sistema (40) cualesquiera que sean los valores de los segundos miembros de estas ecuaciones, es necesario y suficiente que el determinante de este sistema

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \ldots & z_1 \\ x_2 & y_2 & \ldots & z_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_k & y_k & \ldots & z_k \end{vmatrix}$$

El lector podrá comprobar fácilmente que la condición de este teorema se cumple en los casos particulares (41) y (42). Más adelante tropezaremos con situaciones en que esta proposición resultará útil. Por ahora, nos basaremos en el hecho (demostrado independientemente de este teorema) de que siempre existen unos números $x_1, \ldots, z_1, \ldots$ $\ldots, x_k, \ldots, z_k$ [que son los términos iniciales de las sucesiones (34)] tales que el sistema (40) tiene soluciones cualesquiera que sean $u_1, u_2, \ldots, u_k$.

Si para los términos iniciales de las sucesiones (34) se han tomado números de esta índole, cualquier sucesión que satisfaga la ecuación recurrente (33) se determina, como hemos explicado, mediante la fórmula (39), donde los números $A, B, \ldots, C$ se buscan de las ecuaciones (40). Se llama *base* de la ecuación recurrente (33) todo sistema de k sucesiones (34) que permiten mediante la fórmula (39) —o sea, multiplicando por unos números $A, B, \ldots, C$ y sumando— determinar los términos de cualquier sucesión que verifique la ecuación dada (33).

De lo expuesto resulta que toda ecuación posee una base y que ésta se puede escoger de distintos modos. Por ejemplo, los sistemas que tienen como términos iniciales

$$\left.\underbrace{\begin{matrix} 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & 1 \end{matrix}}_{(k)}\right\} \text{ ó } \left.\underbrace{\begin{matrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ 0, & 1, & \ldots, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & 1 \end{matrix}}_{(k)}\right\}$$

forman una base de una ecuación recurrente cualquiera de orden k.

Resumamos lo expuesto en el punto 5.

Para toda ecuación recurrente de orden k existe una cantidad infinita de sucesiones recurrentes distintas que la verifican.

sea diferente de cero. Esta misma condición es necesaria y suficiente para que la solución del sistema (40) sea única cualesquiera que sean los segundos miembros (por ejemplo, iguales a cero). Por lo tanto, en el caso de un sistema de k ecuaciones lineales con k incógnitas, las condiciones de existencia de la solución para cualesquiera valores de los segundos miembros coinciden con las condiciones de unicidad de la solución en el caso en que los segundos miembros son nulos. La proposición enunciada en el texto refleja precisamente este hecho.

Cualquiera de ellas se puede obtener a partir de k sucesiones (que también verifican esta ecuación y que representan una base de la misma) multiplicando cada una de las k sucesiones por unos números A, B, . . ., C y sumando término por término.

Es decir, para resolver plenamente una ecuación recurrente de orden k basta hallar un número finito k de sucesiones que satisfacen esta ecuación y que constituyen una base de la misma.

Veamos algunos ejemplos con el fin de aclarar lo expuesto.

Ejemplo 1. Supongamos que se tiene la ecuación recurrente de segundo orden

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

Su base debe componerse de dos sucesiones

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots$$

Escojámoslas tomando

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1, \text{ e } y_1 = 0,\ y_2 = 1.$$

La ecuación recurrente escrita en la forma

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$$

muestra que es constante la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión, es decir, la sucesión que verifica esta ecuación es necesariamente una progresión aritmética; por eso, en el caso de la sucesión $\{x_n\}$ con los términos iniciales $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$ se obtiene la progresión aritmética de diferencia nula, o sea

$$1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \ldots\ (x_n = 1),$$

mientras que en el caso de la sucesión $\{y_n\}$ con los términos iniciales $y_1 = 0$ e $y_2 = 1$ se obtiene la progresión aritmética de diferencia igual a uno, o sea,

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\ \ldots\ (y_n = n-1).$$

Según la fórmula (39), todo término de cualquier sucesión recurrente que verifica la ecuación dada puede ser representado en la forma

$$u_n = Ax_n + By_n = A + B\,(n-1),$$

donde A y B deben ser determinados de las ecuaciones

$$u_1 = A + B(1-1),$$
$$u_2 = A + B(2-1),$$

es decir,

$$u_1 = A,$$
$$u_2 = A + B.$$

De aquí resulta

$$A = u_1, \quad B = u_2 - u_1$$

y, por consiguiente,

$$u_n = u_1 + (n-1)(u_2 - u_1).$$

Hemos obtenido la fórmula general para los términos de cualquier sucesión que verifica la ecuación

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

Tomando $u_1 = a$ y $u_2 - u_1 = d$, podemos representarla en la forma

$$u_n = a + (n-1)\,d$$

que es la fórmula ya sabida del término general de una progresión aritmética.

Ejemplo 2. Consideremos otra ecuación recurrente de segundo orden

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Tomando $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$, obtenemos la sucesión ya considerada de Fibonacci

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

Para obtener la segunda sucesión de la base tomemos la sucesión $\{y_n\}$ tal que $y_1 = 0$ e $y_2 = 1$. Tendremos

$$y_3 = y_2 + y_1 = 1, \; y_4 = y_3 + y_2 = 2,$$
$$y_5 = y_4 + y_3 = 3, \; \ldots$$

Aquí $y_2 = x_1, y_3 = x_2, y_4 = x_3, y_5 = x_4, \ldots$ y, en general, $y_n = x_{n-1}$ (para $n = 2, 3, \ldots$). Efectivamente, si hemos demostrado ya estas igualdades para todos los valores

$n \leqslant m+1$, tendremos, en particular, $y_{m+1} = x_m$ e $y_m = x_{m-1}$, y, por eso, para y_{m+2} encontraremos

$$y_{m+2} = y_{m+1} + y_m = x_m + x_{m-1} = x_{m+1},$$

o sea, resulta que las igualdades hipotéticas son válidas también para $n = m+2$.

Es decir,

$$y_n = x_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Por lo tanto, para cualquier sucesión que verifique la ecuación

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

encontramos, de acuerdo con lo explicado [fórmula (39)], que

$$u_n = Ax_n + By_n,$$

donde A y B se determinan de las ecuaciones

$$u_1 = Ax_1 + By_1 = A,$$
$$u_2 = Ax_2 + By_2 = A + B,$$

o sea,

$$A = u_1, \quad B = u_2 - u_1$$

y

$$u_n = u_1 x_n + (u_2 - u_1)\, y_n.$$

Siendo $n \geqslant 2$, podemos sustituir y_n por x_{n-1} de modo que

$$u_n = u_1 x_n + (u_2 - u_1)\, x_{n-1} \quad (n \geqslant 2),$$

es decir,

$$u_n = u_1 (x_n - x_{n-1}) + u_2 x_{n-1}.$$

Si $n \geqslant 3$, tenemos

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad \text{o sea,} \quad x_n - x_{n-1} = x_{n-2}$$

y, por consiguiente,

$$u_n = u_1 x_{n-2} + u_2 x_{n-1} \quad (n \geqslant 3).$$

Es decir, los términos de cualquier sucesión $\{u_n\}$ que verifique la ecuación

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

se expresan según la fórmula encontrada a través de los números de Fibonacci. En particular, siendo $u_1 = -3$ y $u_2 = 1$ (véase la página 17), resulta

$$u_n = -3x_{n-2} + x_{n-1} \quad (n \geqslant 3).$$

6. Probemos ahora que en condiciones muy generales se puede encontrar para la ecuación recurrente (33)

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n$$

una base compuesta de k progresiones geométricas de distintas razones. Para ello veamos bajo qué condiciones una progresión geométrica

$$x_1 = 1,\ x_2 = q,\ \dots,\ x_n = q^{n-1},\ \dots \quad (q \neq 0)$$

verificará la ecuación (33). Observando que

$$x_{n+k} = p^{n+k-1},\ x_{n+k-1} = q^{n+k-2},\ \dots,\ x_n = q^{n-1}$$

e introduciendo estos valores en la ecuación (33) (en lugar de u_{n+k}, u_{n+k-1}, $\dots$, u_n), obtenemos

$$q^{n+k-1} = a_1 q^{n+k-2} + a_2 q^{n+k-3} + \dots + a_k q^{n-1},$$

de donde resulta que

$$q^k = a_1 q^{k-1} + a_2 q^{k-2} + \dots + a_k. \qquad (43)$$

Es decir, *una progresión geométrica satisface la ecuación* (33) *de orden k si, y sólo si, la razón q de esta progresión verifica la ecuación algebraica* (43) *de grado k con los mismos coeficientes que la ecuación* (33).

La ecuación (43) lleva el nombre de ecuación característica de la ecuación recurrente (33). Sea $q = \alpha$ una raíz (real o compleja) de la ecuación característica; tomando entonces

$$x_n = \alpha^{n-1} \quad (n = 1,\ 2,\ \dots), \qquad (44)$$

obtendremos una progresión geométrica (cuyo primer término es $x_1 = 1$ y cuya razón es α) que satisface la ecuación (33). En efecto, α es, por hipótesis, una raíz de la ecuación (43), o sea,

$$\alpha^k = a_1 \alpha^{k-1} + a_2^{k-2} + \dots + a_k.$$

Multiplicando ambos miembros por α^{n-1}, donde n es un número natural cualquiera, obtenemos

$$\alpha^{n+k-1} = a_1\alpha^{n+k-2} + a_2\alpha^{n+k-3} + \ldots + a_k\alpha^{n-1},$$

de donde se desprende que la sucesión (44) satisface la ecuación (33).

Es decir, a toda raíz $q = \alpha$ de la ecuación característica (43) le corresponde la progresión geométrica (44) cuya razón α verifica la ecuación recurrente (33).

Para formar una base compuesta sólo de progresiones geométricas de distintas razones, habrá que tener la cantidad suficiente k de estas progresiones y para ello se necesita tener k distintas raíces de la ecuación característica.

Supongamos que son distintas todas las raíces de la ecuación característica

$$q_1 = \alpha,\ q_2 = \beta,\ \ldots,\ q_k = \gamma.$$

En este caso, tendremos k progresiones geométricas que verifican la ecuación (33)

$$\left.\begin{array}{l} 1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \ldots,\ \alpha^{n-1},\ \ldots, \\ 1,\ \beta,\ \beta^2,\ \ldots,\ \beta^{n-1},\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1,\ \gamma,\ \gamma^2,\ \ldots,\ \gamma^{n-1},\ \ldots, \end{array}\right\} \qquad (45)$$

Mostremos que el sistema de sucesiones (45) constituye una base de la ecuación (33), o sea, que siendo $\{u_n\}$ cualquier sucesión que verifica la ecuación (33), se pueden escoger los números $A, B, \ldots, C$ de modo que para todo n se tenga

$$u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + \ldots + C\gamma^{n-1}. \qquad (46)$$

Para ello bastará demostrar que el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} A + B + \ldots + C = u_1, \\ A\alpha + B\beta + \ldots + C\gamma = u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A\alpha^{k-1} + B\beta^{k-1} + \ldots + C\gamma^{k-1} = u_k \end{array}\right\} \qquad (47)$$

que se obtiene de (46) tomando $n = 1, 2, \ldots, k$ tiene solución, respecto a las incógnitas $A, B, \ldots, C$ cualesquiera que sean los segundos miembros de estas ecuaciones;

para ello, a su vez, es suficiente (véase la página 20) que el sistema homogéneo correspondiente

$$\left.\begin{array}{r} A+B+\ldots+C=0, \\ A\alpha+B\beta+\ldots+C\gamma=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A\alpha^{k-1}+B\beta^{k-1}+\ldots+C\gamma^{k-1}=0 \end{array}\right\} \qquad (48)$$

admita la solución nula solamente. Y así es en efecto.

En verdad, supongamos que existe una solución no nula del sistema (48), es decir, que existen unos números A, B, ..., C que verifican el sistema (48) siendo al menos uno de ellos, digamos A, diferente de cero. Para llegar a una contradicción construyamos primero un polinomio $M(x)$ de grado $k-1$ que se anula para $x=\beta, \ldots, x=\gamma$ y que se hace igual a uno para $x=\alpha$. Puesto que este polinomio es de grado $k-1$ y se anula para $k-1$ valores diferentes de x: $\beta, \ldots, \gamma$, debe tener la forma

$$M(x)=\mu(x-\beta)\ldots(x-\gamma),$$

donde μ es un número. Tomando $x=\alpha$, debemos tener $M(\alpha)=1$ y, por eso,

$$1=\mu(\alpha-\beta)\ldots(\alpha-\gamma),$$

o sea,

$$\mu=\frac{1}{(\alpha-\beta)\ldots(\alpha-\gamma)}.$$

Es decir,

$$M(x)=\frac{(x-\beta)\ldots(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)\ldots(\alpha-\gamma)};$$

es obvio que este polinomio efectivamente satisface las condiciones señaladas. Suprimiendo los paréntesis y reduciendo los términos semejantes, podemos representarlo en la forma

$$M(x)=m_0+m_1x+\ldots+m_{k-1}x^{k-1}.$$

Multiplicando ahora las ecuaciones (48) por m_0, m_1, ..., m_{k-1} y sumándolas término por término, obtenemos

$$A(m_0+m_1\alpha+\ldots+m_{k-1}\alpha^{k-1})+$$
$$+B(m_0+m_1\beta+\ldots+m_{k-1}\beta^{k-1})+\ldots$$
$$\ldots+C(m_0+m_1\gamma+\ldots+m_{k-1}\gamma^{k-1})=0,$$

o sea,

$$AM(\alpha) + BM(\beta) + \ldots + CM(\gamma) = 0.$$

Pero $M(\alpha) = 1$, $M(\beta) = 0, \ldots, M(\gamma) = 0$, y, por consiguiente,

$$A = 0$$

lo que contradice la hipótesis.

Es decir, el sistema (48) tiene únicamente la solución nula y, por lo tanto, el sistema (47) tiene una solución (única) cualesquiera que sean $u_1, u_2, \ldots, u_k$; pero esto significa, a su vez, que el sistema (45) constituye una base de la ecuación (33).

Hemos demostrado de esta manera que siendo distintas las raíces $q = \alpha$, $q = \beta, \ldots, q = \gamma$ de la ecuación característica

$$q^k = a_1 q^{k-1} + a_2 q^{k-2} + \ldots + a_k$$

correspondiente a la ecuación recurrente

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \ldots + a_k u_n,$$

existe una base de esta última ecuación formada por k progresiones geométricas cuyas razones son $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$. En otras palabras, cualesquiera que sean los términos de la sucesión $\{u_n\}$ que verifica la ecuación (33), existen k números $A, B, \ldots, C$ [que se determinan de las ecuaciones (47)] tales que

$$u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + \ldots + C\gamma^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Resumamos lo expuesto en el punto 6.

A toda ecuación recurrente de orden k le corresponde una ecuación algebraica de orden k, llamada ecuación característica de aquélla, y ambas tienen los mismos coeficientes. Toda raíz de la ecuación característica es razón de una progresión geométrica que verifica la ecuación recurrente dada. Si todas las raíces de la ecuación característica son distintas, se obtienen k progresiones geométricas diferentes que forman una base de la ecuación recurrente. Por lo tanto, en este caso los términos de cualquier sucesión que verifica la ecuación recurrente se pueden obtener sumando término por término ciertas progresiones geométricas (en número k).

7. Pasemos a la aplicación de los resultados obtenidos. Comencemos por la sucesión de Fibonacci. En este caso la ecuación recurrente es

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

y, por ende, la ecuación característica (43) da

$$q^2 = q + 1.$$

Resolviéndola obtenemos dos raíces distintas

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Por consiguiente, el término general de la sucesion de Fibonacci puede ser representado así

$$u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}.$$

Para determinar los coeficientes A y B tomemos $n = 1$ y $n = 2$; tendremos

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = 1 = A + B, \\ u_2 = 1 = A\alpha + B\beta = \frac{1}{2}(A+B) + \frac{\sqrt{5}}{2}(A+B). \end{array}\right\}$$

Resolviendo este último sistema, encontramos

$$A = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}, \text{ y } B = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}},$$

o sea,

$$u_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

y, por lo tanto,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(1-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \qquad (49)$$

Hemos obtenido la expresión general para los números de Fibonacci. A primera vista, la fórmula parece muy engorrosa y poco cómoda. Sin embargo, permite demostrar una serie de resultados curiosos. Mostremos, por ejemplo, que la suma de los cuadrados de dos números consecutivos de Fibonacci es también un número de Fibonacci.

Efectivamente, tenemos

$$u_n^2=\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-2(-1)^n\right],$$

$$u_{n+1}^2=\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2}-2(-1)^{n+1}\right]$$

y, por consiguiente,

$$u_{n+1}^2+u_n^2=$$

$$=\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{2}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right]=u_{2n+1}.$$

Es decir,

$$u_{n+1}^2+u_n^2=u_{2n+1}. \tag{50}$$

Por ejemplo,

$$u_{13}=u_7^2+u_6^2=13^2+8^2=233$$

lo que también es, dicha sea de paso, la respuesta al problema de Fibonacci.

Proponemos al lector demostrar que para los números de Fibonacci es válida la relación

$$u_n u_m+u_{n+1}u_{m+1}=u_{n+m+1} \tag{51}$$

más general que (50).

Para ver otra aplicación de la fórmula (49) demostremos el teorema siguiente:

Sean a y b dos números naturales y sea $a<b$; el número de divisiones sucesivas que se debe realizar empleando el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor (m.c.d.) *de a y b no pasa del número quintuplicado de las cifras del número a escrito en el sistema decimal de numeración.*

Aplicando el algoritmo de Euclides para hallar el m.c.d. de los números a y b, obtenemos la cadena de igualdades

$$\left.\begin{array}{rl}
1) & b=ax'+y',\\
2) & a=y'x''+y'',\\
3) & y'=y''x'''+y''',\\
\multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\
k) & y^{(k-2)}=y^{(k-1)}x^{(k)}+y^{(k)},\\
k+1) & y^{(k-1)}=y^{(k)}x^{(k+1)}.
\end{array}\right\} \tag{52}$$

Los restos consecutivos que aquí aparecen verifican las desigualdades

$$a > y' > y'' > y''' > \ldots > y^{(k-1)} > y^{(k)} \geqslant 1.$$

En la última de las desigualdades (52) el resto es igual a cero. Por consiguiente, el resto anterior $y^{(k)}$ es precisamente el m.c.d. de b y a y k es el número de operaciones necesarias para determinarlo. Como hemos dicho, lo que nos proponemos es obtener una estimación para el número k. Con este fin comparemos los números $y^{(k)}, y^{(k-1)}, \ldots, y'$, a y los números de Fibonacci $u_1, u_2, u_3, \ldots$ Observemos que $y^{(k)} \geqslant 1 = u_2$; pero como el resto anterior $y^{(k-1)}$ es mayor que $y^{(k)}$, resulta $y^{(k-1)} \geqslant 2 = u_3$. Por eso, de la k-ésima igualdad deducimos que

$$y^{(k-2)} = y^{(k-1)}x^{(k)} + y^{(k)} \geqslant y^{(k-1)} \cdot 1 + y^{(k)} \geqslant u_3 + u_2 + u_4.$$

Es decir, $y^{(k)} \geqslant u_2$, $y^{(k-1)} \geqslant u_3$ e $y^{(k-2)} \geqslant u_4$.

Supongamos que hemos demostrado ya las desigualdades

$$y^{(k)} \geqslant u_2, \ \ldots, \ y^{(m)} \geqslant u_{k-m+2}, \ y^{(m-1)} \geqslant u_{k-m+3} \quad (m-1 \geqslant 2).$$

De la igualdad $y^{(m-2)} = y^{(m-1)}x^{(m)} + y^{(m)}$ deducimos entonces que

$$y^{(m-2)} \geqslant y^{(m-1)} \cdot 1 + y^{(m)} \geqslant u_{k-m+3} + u_{k-m+3} = u_{k-m+4}.$$

Por lo tanto, continuando nuestros razonamientos, llegaremos a las desigualdades

$$y'' \geqslant u_k, \ y' \geqslant u_{k+1}$$

y de la igualdad 2) deduciremos entonces que

$$a = y'x'' + y'' \geqslant y' \cdot 1 + y'' \geqslant u_{k+1} + u_k = u_{k+2}.$$

Pero, según la fórmula (49), para u_{k+2} tenemos

$$u_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right],$$

o sea,

$$a \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right] >$$

$$> \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - 1\right] \qquad (53)$$

$\left(\text{ya que } \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1 \text{ y, por ende, } \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|^{k+2} < 1\right).$

De (53) resulta

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} < a\sqrt{5}+1 < \sqrt{5}\,(a+1) < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}(a+1)$$

$$\left(\text{ya que } \sqrt{5} < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{3}\right)^{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ por ser } \sqrt{5} < 3\right).$$

Es decir,

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} < a+1. \tag{54}$$

Fijémonos ahora en que

$$u_5 = 5 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{5} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{5}\right] <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{5} + 1\right],$$

de donde resulta

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{5} > 5\sqrt{5}-1 > 10.$$

Por consiguiente,

$$10^{k} < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{5k} < (a+1)^{5}. \tag{55}$$

Si para escribir el número a en el sistema decimal de numeración se necesitan n cifras (o sea, a es un número de n dígitos), es obvio que

$$10^{n-1} \leqslant a < 10^{h},$$

de donde

$$a+1 \leqslant 10$$

y, en virtud de la desigualdad (55),

$$10^{k} < (a+1)^{5} \leqslant 10^{5n},$$

o sea,

$$k < 5n. \tag{56}$$

Hemos obtenido el resultado necesario: el número k de divisiones sucesivas en el algoritmo de Euclides es menor que el número quintuplicado de cifras del menor de los números b ó a escrito en el sistema decimal de numeración.

La demostración realizada permite ver que el caso más desfavorable de aplicación del algoritmo de Euclides (en el sentido de que el número de operaciones resulta elevado y se aproxima a la cota establecida en el teorema) se da si b y a son dos números consecutivos de Fibonacci. Para confirmar esto, tomemos, por ejemplo, $b = u_{20} = 6765$ y $a = u_{19} = 4181$. En este caso a consta de cuatro cifras y, por lo tanto, según el teorema demostrado, el número de operaciones que requiere el algoritmo de Euclides debe ser menor que $5 \cdot 4 = 20$. El número exacto de operaciones es $k = 17$. Efectivamente:

1) $6765 = 4181 \cdot 1 + 2584,$	10) $89 = 55 \cdot 1 + 34,$
2) $4181 = 2584 \cdot 1 + 1597,$	11) $55 = 34 \cdot 1 + 21,$
3) $2584 = 1597 \cdot 1 + 987,$	12) $34 = 21 \cdot 1 + 13,$
4) $1597 = 987 \cdot 1 + 610,$	13) $21 = 13 \cdot 1 + 8,$
5) $987 = 610 \cdot 1 + 377,$	14) $13 = 8 \cdot 1 + 5,$
6) $610 = 377 \cdot 1 + 233,$	15) $8 = 5 \cdot 1 + 3,$
7) $377 = 233 \cdot 1 + 144,$	16) $5 = 3 \cdot 1 + 2,$
8) $233 = 144 \cdot 1 + 89,$	17) $3 = 2 \cdot 1 + 1,$
9) $144 = 89 \cdot 1 + 55,$	18) $2 = 1 \cdot 2 + 0.$

Para los restos obtenemos aquí sucesivamente en orden decreciente los números de Fibonacci. Todos los cocientes (a excepción del último) son iguales a la unidad y esto explica porque el número de operaciones es grande. El máximo común divisor es igual a uno (igualdad 17) lo que para dos números consecutivos de Fibonacci se podía haber previsto desde el principio. Efectivamente, de $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ resulta que el m.c.d. de los números u_{n+2} y u_{n+1} coincide con el m.c.d. de los números u_{n+1} y u_n. Por eso, todo par consecutivo de números consecutivos de Fibonacci tiene el mismo m.c.d. Para hallarlo, basta considerar el par $u_2 = u_1 = 1$, de donde resulta que el m.c.d. es igual a uno.

8. Para el ejemplo siguiente tomemos la sucesión periódica (16)

$u_1 = 5, u_2 = 7, u_3 = 1, u_4 = 3, u_5 = 2, u_6 = 1, u_7 = 3, \ldots$

En este caso la ecuación recurrente es

$$u_{n+3} = u_n \quad (n \geqslant 3)$$

y, por ende, la ecuación característica es

$$q^3 = 1.$$

Esta ecuación tiene las raíces siguientes:

$$\alpha=1,\ \beta=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ y }\ \gamma=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por lo tanto, el término general de la sucesión hay que buscarlo en laforma [véase la fórmula (46)]

$$u_n=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}+C\gamma^{n-1}=$$
$$=A+B\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}+C\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}.$$

Podemos exigir que esta fórmula se cumpla para todos los valores de n en los cuales también se cumple la ecuación recurrente, o sea, para $n=3, 4, 5, \ldots$

Puesto que

$$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=-\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right),$$
$$-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=-\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right),$$

tenemos aplicando la fórmula de Moivre

$$u_n=A+B\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}+C\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}=$$
$$=A+(-1)^{n-1}B\left[\cos\frac{\pi}{3}(n-1)-i\,\mathrm{son}\,\frac{\pi}{3}(n-1)\right]+$$
$$+(-1)^{n-1}C\left[\cos\frac{\pi}{3}(n-1)+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}(n-1)\right]=$$
$$=A+(B+C)(-1)^{n-1}\cos\frac{\pi}{3}(n-1)+$$
$$+i(-B+C)(-1)^{n-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}(n-1).$$

Tomemos $B+C=A_1$ e $i(-B+C)=A_2$; entonces podemos escribir esta fórmula así

$$u_n=A+A_1(-1)^{n-1}\cos\frac{\pi}{3}(n-1)+A_2(-1)^{n-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}(n-1)$$
$$(n\geqslant 3)$$

y sólo quedará determinar los coeficientes A, A_1, y A_2. Tomando $n=3$, $n=4$ y $n=5$, obtenemos tres ecuaciones con tres incógnitas

$$u_3=1=A+A_1\cos\frac{2\pi}{3}+A_2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}=A-\frac{1}{2}A_1+\frac{\sqrt{3}}{2}A_2,$$

$$u_4=3=A-A_1\cos\frac{3\pi}{3}-A_2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{3}=A+A_1,$$

$$u_5=2=A+A_1\cos\frac{4\pi}{3}+A_2\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}=A-\frac{1}{2}A_1-\frac{\sqrt{3}}{2}A_2,$$

de donde resulta

$$A=2,\quad A_1=1 \text{ y } A_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Por consiguiente,

$$u_n=2+(-1)^{n-1}\left[\cos(n-1)\frac{\pi}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}(n-1)\frac{\pi}{3}\right]=$$
$$=2+(-1)^n\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}(n-2)\frac{\pi}{3}\quad(n\geqslant 3).$$

Vemos que en este caso el término general de la sucesión se expresa mediante funciones trigonométricas lo que concuerda plenamente con el carácter periódico de la sucesión.

Por último, daremos un ejemplo relacionado directamente con la división de polinomios.

Supongamos que se tiene dos polinomios $P(x)=3+x^2-x^5$ y $Q(x)=2-x-2x^2+x^3$; el problema consiste en determinar la estructura de los coeficientes del cociente que se obtiene al dividir $P(x)$ entre $Q(x)$. Como hemos visto en el punto 2, la sucesión de los coeficientes del cociente

$$u_1=D_0,\quad u_2=D_1,\ \ldots,\ u_n=D_{n-1},\ \ldots$$

es una sucesión recurrente y sus términos satisfacen la ecuación (20):

$$D_{n+k}=-\frac{B_1}{B_0}D_{n+k-1}-\ldots-\frac{B_k}{B_0}D_n\quad(n\geqslant l-k+1),$$

donde k es el grado de $Q(x)$, B_0, B_1, ..., B_k son los coeficientes de $Q(x)$ y l es el grado de $P(x)$.

En nuestro caso $k=3$, $B_0=2$, $B_1=-1$, $B_2=-2$, $B_3=1$ y $l=5$, de modo que

$$D_{n+3}=\frac{1}{2}D_{n+2}+\frac{2}{2}D_{n+1}-\frac{1}{2}D_n \quad (n\geqslant 5-3+1=3),$$

o sea,

$$D_{n+3}=\frac{1}{2}D_{n+2}+D_{n+1}-\frac{1}{2}D_n \quad (n\geqslant 3).$$

La ecuación característica es

$$q^3=\frac{1}{2}q^2+q-\frac{1}{2},$$

es decir,

$$q^3-q-\frac{1}{2}(q^2-1)=\left(q-\frac{1}{2}\right)(q-1)(q+1)=0.$$

Por eso, sus raíces son

$$\alpha=\frac{1}{2}, \quad \beta=1, \quad \gamma=-1$$

y para D_n encontramos

$$D_n=A\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+B\cdot 1^n+C(-1)^n \quad (n\geqslant 3).$$

Tomando $n=3$, $n=4$ y $n=5$, tendremos las ecuaciones

$$D_3=\frac{1}{8}A+B-C,$$

$$D_4=\frac{1}{16}A+B+C,$$

$$D_5=\frac{1}{32}A+B-C.$$

Aquí se desconocen tanto los coeficientes A, B y C como los números D_3, D_4 y D_5. Para encontrar los últimos, realicemos la división directa de $P(x)$ entre $Q(x)$ determinando en el cociente los términos hasta la quinta potencia inclusive. Tendremos

$$\begin{array}{l|l}
3+x^2-x^5 & 2-x-2x^2+x^3 \\
\hline
-\;3-\frac{3}{2}x-3x^2+\frac{3}{2}x^3 & \frac{3}{2}+\frac{3}{4}x+2\frac{3}{8}x^2+1\frac{3}{16}x^3+2\frac{19}{32}x^4 \\
\quad \frac{3}{2}x+4x^2-\frac{3}{2}x^3-x^5 & \\
\quad -\;\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x^3+\frac{3}{4}x^4 & \\
\qquad 4\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}x^4-x^5 & \\
\qquad -\;4\frac{3}{4}x^2-2\frac{3}{8}x^3-4\frac{3}{4}x^4+2\frac{3}{8}x^5 & \\
\qquad\quad 2\frac{3}{8}x^3+4x^4-3\frac{3}{8}x^5 & \\
\qquad\quad -\;2\frac{3}{8}x^3-1\frac{3}{16}x^4-2\frac{3}{8}x^5+1\frac{3}{16}x^6 & \\
\qquad\qquad 5\frac{3}{16}x^4-x^5-1\frac{3}{16}x^6 & \\
\qquad\qquad -\;5\frac{3}{16}x^4-2\frac{19}{32}x^5-5\frac{3}{16}x^6+2\frac{19}{32}x^7 & \\
\qquad\qquad\quad 1\frac{19}{32}x^5+4x^6-2\frac{19}{32}x^7 &
\end{array}$$

De aquí resulta $D_0=\frac{3}{2}$, $D_1=\frac{3}{4}$, $D_2=2\frac{3}{8}$, $D_3=1\frac{3}{16}$, $D_4=2\frac{19}{32}$ y $D_5=\frac{51}{64}$.

Por consiguiente, el sistema de ecuaciones obtenido antes toma la forma

$$\frac{1}{8}A+B-C=1\frac{3}{16},$$

$$\frac{1}{16}A+B+C=2\frac{19}{32},$$

$$\frac{1}{32}A+B-C=\frac{51}{64},$$

de donde encontramos

$$A=4\frac{1}{6},\quad B=\frac{3}{2},\ \text{y}\ C=\frac{5}{6}.$$

Es decir,

$$D_n = 4\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^n}+\frac{3}{2}+\frac{5}{6}(-1)^n \quad (n\geqslant 3)$$

y queda resuelto el problema. De la fórmula hallada resulta

$$D_6 = 2\frac{51}{128},\quad D_7=\frac{179}{256},\quad D_8=2\frac{179}{512},\ \ldots$$

9. En todos los ejemplos considerados la ecuación característica tenía sólo raíces simples. Sin embargo, tomemos el ejemplo de la sucesión de las sumas de los cuadrados de los números naturales expuesto en la página 15. La ecuación recurrente de esta sucesión es

$$s_{n+4} = 4s_{n+3} - 6s_{n+2} + 4s_{n+1} - s_n$$

y, por consiguiente, la ecuación característica será

$$q^4 = 4q^3 - 6q^2 + 4q - 1,$$

o sea,

$$q^4 - 4q^3 + 6q^2 - 4q + 1 = (q-1)^4 = 0.$$

Tiene una sólo raíz $q = 1$ de multiplicidad cuatro; por eso, en este caso obtenemos sólo una progresión geométrica de razón 1 cuyos términos verifican la ecuación recurrente.

En tales casos resulta necesario hallar otras sucesiones recurrentes elementales que, agregadas a la sucesión geométrica señalada, formen una base de la ecuación recurrente. En nuestro ejemplo estas sucesiones se pueden escoger así

$$\begin{array}{llllll} 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots, & n-1, & \ldots; \\ 0, & 1, & 4, & 9, & \ldots, & (n-1)^2, & \ldots; \\ 0, & 1, & 8, & 27, & \ldots, & (n-1)^3, & \ldots \end{array}$$

(el lector podrá comprobarlo fácilmente). Sin analizar el caso general, ya que exige mucho esfuerzo, consideremos el siguiente ejemplo típico.

Supongamos que se tiene la ecuación recurrente

$$u_{n+k} = C_k^{k-1}\alpha u_{n+k-1} - C_k^{k-2}\alpha^2 u_{n+k-2} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-1} C_k^0 \alpha^k u_n, \qquad (57)$$

donde C_k^{k-1}, C_k^{k-2}, ..., C_k^0 son los coeficientes binomiales de orden k. La ecuación característica correspondiente

$$q^k = C_k^{k-1}\alpha q^{k-1} - C_k^{k-2}\alpha^2 q^{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} C_k^0 \alpha^k$$

se puede escribir así

$$(q-\alpha)^k = 0.$$

Tiene una raíz $q = \alpha$ de multiplicidad k. Es evidente que

$$(\alpha-\alpha)^k = \alpha^k - C_k^{k-1}\alpha^k + C_k^{k-2}\alpha^k - \ldots + (-1)^k C_k^0 \alpha^k = 0. \quad (58)$$

Consideremos, en general, las siguientes identidades

$$(\alpha-\alpha)^{k-m} = \alpha^{k-m} - C_{k-m}^{k-m-1}\alpha^{k-m} + C_{k-m}^{k-m-2}\alpha^{k-m} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-m} C_{k-m}^0 \alpha^{k-m} = 0,$$

donde $m = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ o

$$(1-1)^{k-m} = C_{k-m}^{k-m} - C_{k-m}^{k-m-1} + C_{k-m}^{k-m-2} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\mu} C_{k-m}^{k-m-\mu} + \ldots + (-1)^{k-m} C_{k-m}^0 = 0. \quad (59)$$

La igualdad (59) correspondiente a $m = 0$ es

$$C_k^k - C_k^{k-1} + C_k^{k-2} - \ldots + (-1)^{\mu} C_k^{k-\mu} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^k C_k^0 = 0. \quad (59')$$

Fijándonos en que

$$C_k^{k-\mu} = \frac{k(k-1)\ldots(\mu+1)}{1\cdot 2\ldots(k-\mu)} = \frac{k(k-1)\ldots(k-m+1)}{(k-m-\mu+1)\ldots(k-\mu)} C_{k-m}^{k-m-\mu}$$
$$(m = 1, 2, \ldots, k-1; \quad 0 \leqslant \mu \leqslant k-m),$$

o sea,

$$k(k-1)\ldots(k-m+1) C_{k-m}^{k-m-\mu} =$$
$$= (k-m-\mu+1)\ldots(k-\mu) C_k^{k-\mu}, \quad (60)$$

multipliquemos cada una de las igualdades (59') tomadas para $m = 1, 2, \ldots, k-1$ por el factor correspondiente

$k(k-1)\ldots(k-m+1)$ y empleemos (60) para escribirlas en la forma

$$(k-m+1)\ldots kC_k^k-(k-m)\ldots(k-1)C_k^{k-1}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{\mu}(k-m-\mu+1)\ldots(k-\mu)C_k^{k-\mu}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{k-m}1\cdot 2\ldots mC_k^0=0 \qquad (59'')$$
$$(m=1,\ 2,\ \ldots,\ k-1).$$

Demostremos ahora que para $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1$ tienen lugar las igualdades siguientes:

$$k^mC_k^k-(k-1)^mC_k^{k-1}+\ldots+(-1)^{\mu}(k-\mu)^mC_k^{k-\mu}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^k\cdot 0^mC_k^0=0. \qquad (61)$$

En efecto, la igualdad que corresponde a $m=0$ coincide con (59') y, por ende, es válida.

Empleando la inducción, aceptemos que las igualdades (61) han sido ya demostradas para $m=0,\ 1,\ \ldots,\ j$ $(j\leqslant k-2)$ y demostremos que también será válida la igualdad correspondientes a $m=j+1$. Consideremos para ello el siguiente polinomio de grado $j+1$:

$$f(x)=(x-j)(x-j+1)\ \ldots\ (x-1)x=$$
$$=x^{j+1}-\beta_jx^j-\ \ldots\ -\beta_1x. \qquad (62)$$

Multipliquemos las igualdades (61) tomadas para $m=1,\ 2,\ \ldots,\ j$ por los números $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_j$ respectivamente:

$$\left.\begin{array}{l}
\beta_1kC_k^k-\beta_1(k-1)C_k^{k-1}+\ldots\\
\qquad\ldots+\beta_1(-1)^{\mu}(k-\mu)C_k^{k-\mu}+\ldots\\
\qquad\qquad\ldots+\beta_1(-1)^k\cdot 0\cdot C_k^0=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\beta_jk^jC_k^k-\beta_j(k-1)^jC_k^{k-1}+\ldots\\
\qquad\ldots+\beta_j(-1)^{\mu}(k-\mu)^jC_k^{k-\mu}+\ldots\\
\qquad\qquad\ldots+\beta_j(-1)^k\cdot 0\cdot C_k^0=0.
\end{array}\right\} \qquad (63)$$

Consideremos además la igualdad (59") correspondiente a $m=j+1$ escribiéndola en la forma

$$f(k)\,C_k^k-f(k-1)\,C_k^{k-1}+\ldots+(-1)^{\mu}f(k-\mu)\,C_k^{k-\mu}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^k f(0)\,C_k^0=0; \quad (64)$$

nos hemos basado aquí en que

$$(k-j)\ldots k=f(k),\ (k-j-1)\ldots(k-1)=$$
$$=f(k-1),\ \ldots,\ (k-\mu-j)\ldots(k-j)=$$
$$=f(k-j),\ \ldots$$

Sumando (63) y (64) término por término, encontramos

$$[\beta_1 k+\ldots+\beta_j k^j+f(k)]\,C_k^k-$$
$$-[\beta_1(k-1)+\ldots+\beta_j(k-1)^j+f(k-1)]\,C_k^{k-1}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{\mu}[\beta_1(k-\mu)+\ldots$$
$$\ldots+\beta_j(k-\mu)^j+f(k-\mu)]\,C_k^{k-\mu}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^k[\beta_1\cdot 0+\ldots+\beta_j\cdot 0^j+f(0)]\,C_k^0=0.$$

Pero, en virtud de (62),

$$\beta_1 x+\beta_2 x^2+\ldots+\beta_j x^j+f(x)=x^{j+1}.$$

Por eso,el resultado encontrado significa que

$$k^{j+1}C_k^k-(k-1)^{j+1}C_k^{k-1}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{\mu}(k-\mu)^{j+1}C_k^{k-\mu}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^k\cdot 0^{j+1}\cdot C_k^0=0.$$

Hemos obtenido la igualdad (61) para $m=j+1$ y, con ello, concluye la demostración de las relaciones (61).

Consideremos, por último, un polinomio cualquiera de grado no mayor que $k-1$:

$$P(x)=A_{k-1}x^{k-1}+A_{k-2}x^{k-2}+\ldots+A_0. \quad (65)$$

Multiplicando las igualdades (61) tomadas para $m=0$, 1, 2, ..., $k-1$ por A_0, A_1, ..., A_{k-1} respectivamente, tendremos

$$A_0C_k^k-A_0C_k^{k-1}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{\mu}A_0C_k^{k-\mu}+\ldots+(-1)^kA_0C_k^0=0,$$

$$A_1kC_k^k - A_1(k-1)C_k^{k-1} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\mu} A_1(k-\mu)C_k^{k-\mu} + \ldots + (-1)^k A_1 \cdot 0 \cdot C_k^0 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{k-1}k^{k-1}C_k^k - A_{k-1}(k-1)^{k-1}C_k^{k-1} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\mu} A_{k-1}(k-\mu)^{k-1}C_k^{k-\mu} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^k A_{k-1} \cdot 0^{k-1} \cdot C_k^0 = 0.$$

Sumando término por término, encontramos

$$(A_0 + A_1k + \ldots + A_{k-1}k^{k-1})\, C_k^k -$$
$$-[A_0 + A_1(k-1) + \ldots + A_{k-1}(k-1)^{k-1}]\, C_k^{k-1} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\mu}[A_0 + A_1(k-\mu) + \ldots$$
$$\ldots + A_{k-1}(k-\mu)^{k-1}]C_k^{k-\mu} + \ldots + (-1)^k[A_0 + A_1 \cdot 0 + \ldots$$
$$\ldots + A_{k-1} \cdot 0^{k-1}]\, C_k^0 = 0,$$

o sea,

$$P(k) \cdot C_k^k - P(k-1) \cdot C_k^{k-1} + \ldots + (-1)^k P(0) \cdot C_k^0 = 0. \quad (66)$$

Es decir, todo polinomio $P(x)$ de grado no mayor que $k-1$ satisface la relación (66).

Tomemos, en particular, $P(x) = (x + n - 1)^m$, donde n es un número natural y m es un número entero tal que $0 \leqslant m \leqslant k-1$. La igualdad (66) dará entonces

$$(k+n-1)^m C_k^k - (k+n-2)^m C_k^{k-1} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^k (n-1)^m C_k^0 = 0;$$

multiplicando por α^{k+n-1} y tomando 1 en lugar de C_k^k, obtenemos

$$(k+n-1)^m \alpha^{k+n-1} = C_k^{k-1}\alpha(k+n-2)^m \alpha^{k+n-2} -$$
$$- C_k^{k-2}\alpha^2 (k+n-3)^m \alpha^{k+n-3} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-1} C_k^0 \alpha^k (n-1)^m \alpha^{n-1}. \quad (67)$$

Comparando (67) y (57), llegamos a la conclusión de que cada una de las k sucesiones

$$\left.\begin{array}{llllll} 1, & \alpha, & \alpha^2, & \ldots, \alpha^{n-1}, & \ldots, & (m=0); \\ 0, & \alpha, & 2\alpha^2, & \ldots, (n-1)\,\alpha^{n-1}, & \ldots, & (m=1); \\ 0, & \alpha, & 2^2\alpha^2, & \ldots, (n-1)^2\,\alpha^{n-1}, & \ldots, & (m=2); \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & \alpha, & 2^{k-1}\alpha^2, & \ldots, (n-1)^{k-1}\,\alpha^{n-1}, & \ldots, & (m=k-1) \end{array}\right\} \quad (68)$$

satisface la ecuación recurrente (57).

Si demostramos que estas sucesiones forman una base, resultará que el término general de toda sucesión que cumpla la ecuación (57) tiene la forma

$$u_n = [B_0 + B_1(n-1) + \ldots$$
$$\ldots + B_{k-1}(n-1)^{k-1}]\,\alpha^{n-1} = Q\,(n-1)\,\alpha^{n-1}, \quad (69)$$

donde $Q\,(x) = B_0 + B_1x + \ldots + B_{k-1}x^{k-1}$ es un polinomio de coeficientes arbitrarios y de grado $k - 1$ todo lo más.

Para ello basta demostrar que el sistema de k ecuaciones lineales

$$\begin{array}{lll} B_0 + B_1\cdot 0 & + \ldots + B_{k-1}\cdot 0^{k-1} & = u_1, \\ B_0 + B_1\cdot 1 & + \ldots + B_{k-1}\cdot 1^{k-1} & = u_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ B_0 + B_1(k-1) & + \ldots + B_{k-1}(k-1)^{\;-1} & = u_k \end{array}$$

tiene solución (respecto a las incógnitas $B_0, B_1, \ldots, B_{k-1}$) cualesquiera que sean $u_1, \ldots, u_k$, o sea (en virtud de la proposición de la página 20), que el sistema

$$\begin{array}{r} B_0 = 0, \\ B_0 + B_1 + \ldots + B_{k-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_0 + (k-1)\,B_1 + \ldots + (k-1)^{k-1}B_{k-1} = 0 \end{array}$$

tiene únicamente la solución nula. Pero las ecuaciones de este sistema significan que

$$Q\,(0) = Q\,(1) = \ldots = Q\,(k-1) = 0,$$

es decir, que la ecuación

$$B_0 + B_1x + \ldots + B_{k-1}x^{k-1} = 0$$

de grado no mayor que $k-1$ tiene, como mínimo, k raíces distintas $0, 1, 2, \ldots, k-1$. De aquí resulta

$$B_0 = B_1 = \ldots = B_{k-1} = 0$$

y con esto termina la demostración de que las sucesiones (68) forman una base de las sucesiones recurrentes que satisfacen la ecuación (57).

En el caso de una sucesión recurrente arbitraria que responda a la ecuación general

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n \qquad (a_k \neq 0), \tag{70}$$

la ecuación característica

$$q^k = a_1 q^{k-1} + \ldots + a_k \tag{71}$$

puede tener una raíz α de multiplicidad a, una raíz β de multiplicidad b, ..., una raíz γ de multiplicidad c aunque sólo $a + b + \ldots + c = k$ raíces.

Se puede demostrar para este caso general que una de las bases es la que se compone de las k sucesiones siguientes

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \ldots,\ \alpha^{n-1},\ \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0,\ \alpha,\ 2^{a-1}\alpha^2,\ \ldots,\ (n-1)^{a-1}\alpha^{n-1},\ \ldots;$$
$$1,\ \beta,\ \beta^2,\ \ldots,\ \beta^{n-1},\ \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0,\ \beta,\ 2^{b-1}\beta^2,\ \ldots,\ (n-1)^{b-1}\beta^{n-1}\ \ldots;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1,\ \gamma,\ \gamma^2,\ \ldots,\ \gamma^{n-1},\ \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0,\ \gamma,\ 2^{c-1}\gamma^2,\ \ldots,\ (n-1)^{c-1}\gamma^{n-1},\ \ldots$$

Por eso

$$u_n = Q(n-1)\,\alpha^{n-1} + R(n-1)\,\beta^{n-1} + \ldots + S(n-1)\,\gamma^{n-1}, \tag{72}$$

donde $Q(x)$, $R(x)$, ..., $S(x)$ son unos polinomios arbitrarios, pero fijos, de grado no mayor que $a-1$, $b-1$, ..., $c-1$, respectivamente.

Es decir, *el término general u_n de cualquier sucesión recurrente es la suma de productos de polinomios en $n-1$* (o, que es lo mismo, en n) *por los términos generales de las progresiones geométricas cuyas razones son iguales a las raíces de la ecuación característica* (71).

Si todas las raíces de esta última ecuación son simples, dichos polinomios son unas constantes y el término general de la sucesión recurrente es una suma de términos de progresiones geométricas.

Se puede demostrar también la proposición inversa: *es recurrente toda sucesión $\{u_n\}$ cuyo término general responda a la fórmula* (72) [1]. La ecuación característica correspondiente (71) se obtiene a partir de sus raíces $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ y de las multiplicidades $a, b, \ldots, c$ de las mismas (que representan los grados de los polinomios $Q, R, \ldots, S$ aumentados en uno). De aquí se obtiene inmediatamente la ecuación recurrente (70).

Consideremos, a título de ejemplo, la sucesión

$$u_n = (n-1)^2 \cdot 2^{n-1} + 3^{n-1}.$$

Comparándola con (72), vemos que las raíces de la ecuación característica son $\alpha = 2$ y $\beta = 3$ con la particularidad de que la multiplicidad de α es $2+1=3$. Por eso, la ecuación característica es

$$(q-2)^3(q-3) = q^4 - 9q^3 + 30q^2 - 44q + 24 = 0$$

y la ecuación recurrente es

$$u_{n+4} = 9u_{n+3} - 30u_{n+2} + 44u_{n+1} - 24u_n.$$

Proponemos al lector demostrar que la sucesión considerada satisface esta última ecuación.

10. Ilustremos los resultados del punto 9 con algunos ejemplos. En el punto 2 hemos visto que los términos de una progresión aritmética verifican la ecuación

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n,$$

[1]) La demostración de ambos teoremas enunciados (directo e inverso) se puede ver en el cuarto capítulo de nuestro libro «Деление с остатком в арифмотике и алгебре» АПН РСФСР, М.— Л., 1949 (División entera en la Aritmética y en el Álgebra), donde la teoría de sucesiones recurrentes se expone de modo distinto al empleado en este libro.

que los cuadrados de los números naturales satisfacen la ecuación

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$$

y que los cubos responden a la ecuación

$$u_{n+4} = 4u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_n.$$

Es evidente que todas estas ecuaciones son casos particulares de la ecuación

$$u_{n+k} = C_k^{k-1} u_{n+k-1} - C_k^{k-2} u_{n+k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} C_k^0 u_n \qquad (57')$$

considerada en el punto 9 (ahora $\alpha = 1$).

Según la fórmula (69), el término general de cualquier sucesión que verifique esta ecuación tiene la forma

$$u_n = B_0 + B_1 (n-1) + \ldots + B_{k-1} (n-1)^{k-1}. \qquad (69')$$

Para determinar los coeficientes $B_0, B_1, \ldots, B_{k-1}$ basta resolver el siguiente sistema de k ecuaciones algebraicas lineales con k incógnitas

$$\left.\begin{aligned} B_0 &= u_1, \\ B_0 + B_1 + \ldots + B_{k-1} &= u_2, \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ B_0 + B_1 (k-1) + \ldots + B_{k-1} (k-1)^{k-1} &= u_k. \end{aligned}\right\} \qquad (73)$$

En el caso de la progresión aritmética tenemos $k = 2$, la fórmula (69') da

$$u_n = B_0 + B_1 (n-1)$$

y el sistema (73) se reduce a

$$B_0 = u_1,$$
$$B_0 + B_1 = u_2.$$

De aquí resulta que $B_0 = u_1$ es el primer término de la progresión y que $B_1 = u_2 - u_1 = d$ es la diferencia de la progresión. Por lo tanto,

$$u_n = u_1 + d(n-1)$$

que es un resultado que ya se conoce.

Huelga realizar el análisis correspondiente a las sucesiones de cuadrados o cubos de los números naturales, pues sabemos de antemano que $u_n = n^2$ ó $u_n = n^3$. Sin embargo, tiene cierto interés aplicar las relaciones (69') y (73) para obtener las fórmulas correspondientes a la suma de los términos de la progresión aritmética, así como a la suma de los cuadrados o cubos de los números naturales.

En el punto 4 hemos demostrado que si los términos de una sucesión $\{u_n\}$ verifican la ecuación

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n,$$

las sumas $\{s_n\}$ de los términos de esta sucesión ($s_1 = u_1$, $s_2 = u_1 + u_2$, $s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots$) satisfacen la ecuación

$$s_{n+k+1} = (1 + a_1) s_{n+k} + (a_2 - a_1) s_{n+k-1} + \ldots$$
$$\ldots + (a_k - a_{k-1}) s_{n+1} - a_k s_n.$$

En el caso de la ecuación (57') es evidente que

$$a_1 = C_k^1,\ a_2 = -C_k^2,\ \ldots,\ a_k = (-1)^{k-1} C_k^k.$$

Por eso,

$$\begin{aligned} 1 + a_1 &= 1 + C_k^1 = C_{k+1}^1, \\ a_2 - a_1 &= -(C_k^2 + C_k^1) = -C_{k+1}^2, \\ a_3 - a_2 &= C_k^3 + C_k^2 = C_{k+1}^3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k - a_{k-1} &= (-1)^{k-1} (C_k^k + C_k^{k-1}) = (-1)^{k-1} C_{k+1}^k, \\ -a_k &= (-1)^k C_k^k = (-1)^k C_{k+1}^{k+1} \end{aligned}$$

y la ecuación correspondiente a la sucesión $\{s_n\}$ se puede representar en la forma

$$s_{n+k+1} = C_{k+1}^1 s_{n+k} - C_{k+2}^2 s_{n+k-1} + \ldots + (-1)^k C_{k+1}^{k+1} s_n,$$

o sea,

$$s_{n+k+1} - C_{k+1}^1 s_{n+k} + C_{k+2}^2 s_{n+k-1} - \ldots + (-1)^{k+1} C_{k+1}^{k+1} s_n = 0.$$

Es decir, si la sucesión $\{u_n\}$ verifica la ecuación (57') de orden k, la sucesión de las sumas correspondientes $\{s_n\}$ satisface una ecuación del mismo tipo pero de orden $k + 1$. En particular, tenemos $k = 2$ para la progresión aritmética, $k = 3$ para la sucesión de los cuadrados de los números naturales y $k = 4$ para la sucesión de los cubos; por lo tanto, si se consideran las sucesiones de las sumas correspondientes, en las igualdades (57′), (69′) y (73) debemos tomar k aumentado en uno, o sea, 3, 4 y 5.

a) Suma de los términos de la progresión aritmética. A tenor con las observaciones hechas, la suma s_n se expresa mediante la fórmula (69′) con $k = 3$ (y tomando s_n en lugar de u_n), o sea,

$$s_n = B_0 + B_1(n-1) + B_2(n-1)^2.$$

Los coeficientes B_0, B_1 y B_2 se determinan del sistema (73) (también tomando $k = 3$ y s_n en lugar de u_n):

$$B_0 = s_1 = u_1,$$
$$B_0 + B_1 + B_2 = s_2 = u_1 + u_2 = 2u_1 + d,$$
$$B_0 + 2B_1 + 2^2 B_2 = s_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 3u_1 + 3d.$$

Resolviéndolo, encontramos

$$B_0 = u_1, \quad B_1 = u_1 + \frac{1}{2}d, \quad B_2 = \frac{1}{2}d.$$

Por consiguiente,

$$s_n = u_1 + \left(u_1 + \frac{1}{2}d\right)(n-1) + \frac{1}{2}d(n-1)^2 =$$
$$= nu_1 + \frac{1}{2}d(n-1)n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} =$$
$$= \frac{n[u_1 + u_1 + (n-1)d]}{2} = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}.$$

b) Suma de los cuadrados de los numeros naturales. Tomando en las fórmulas (69′) y (73) $k = 4$ y sustituyendo u_n por s_n, obtenemos

$$s_n = B_0 + B_1(n-1) + B_2(n-1)^2 + B_3(n-1)^3$$

y

$$B_0 = s_1 = 1,$$
$$B_0 + B_1 + B_2 + B_3 = s_2 = 1 + 2^2 = 5,$$
$$B_0 + 2B_1 + 4B_2 + 8B_3 = s_3 = 1 + 2^2 + 3^2 = 14,$$
$$B_0 + 3B_1 + 9B_2 + 27B_3 = s_4 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30.$$

Del último sistema encontramos

$$B_0 = 1, \quad B_1 = 2\frac{1}{6}, \quad B_2 = 1\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad B_3 = \frac{1}{3}.$$

Por eso,

$$s_n = 1 + \frac{13}{6}(n-1) + \frac{3}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{3}(n-1)^3 =$$
$$= \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 = \frac{n(1+3n+2n^2)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

resultando la fórmula ya conocida.

c) Suma de los cubos de los números naturales. En este caso tenemos

$$s_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Proponemos al lector realizar, a título de ejercicio, la demostración.

Para concluir consideremos el ejemplo de la sucesión α, $2\alpha^2$, $3\alpha^3$, . . ., $n\alpha^n$, . . . ($\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$).

En este caso

$$u_n = n\alpha^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es fácil ver que

$$u_{n+2} = 2\alpha u_{n+1} - \alpha^2 u_n;$$

en efecto,

$$2\alpha u_{n+1} - \alpha^2 u_n = 2\alpha(n+1)\alpha^{n+1} - \alpha^2 n\alpha^n = (n+2)\alpha^{n+2} = u_{n+2}.$$

Puesto que $k = 2$, $a_1 = 2\alpha$ y $a_2 = -\alpha^2$, resulta que la sucesión de las sumas $\{s_n\}$ ($s_1 = \alpha$, $s_2 = \alpha + 2\alpha^2$, $s_3 = \alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3$, . . .) satisface la ecuación [véase (30)]:

$$s_{n+3} = (a_1 + 1)s_{n+2} + (a_2 - a_1)s_{n+1} - a_2 s_n =$$
$$= (2\alpha + 1)s_{n+2} - (\alpha^2 + 2\alpha)s_{n+1} + \alpha^2 s_n.$$

La ecuación característica correspondiente es

$$q^3 = (2\alpha + 1)q^2 - (\alpha^2 + 2\alpha)q + \alpha^2.$$

Es fácil ver que lo satisface el valor $q = \alpha$. Dividiendo el polinomio $q^3 - (2\alpha + 1)q^2 + (\alpha^2 + 2\alpha)q - \alpha^2$ entre $q - \alpha$, obtenemos el cociente

$$q^2 - (\alpha + 1)q + \alpha.$$

Por lo tanto, las dos raíces restantes de la ecuación característica verifican la ecuación

$$q^2 - (\alpha + 1)q + \alpha = 0.$$

y, por ende, son α y 1.

Es decir, la ecuación característica tiene la raíz α de multiplicidad $a = 2$ y la raíz simple $\beta = 1$.

Por eso, para s_n obtenemos [véase la fórmula (69), donde hay que tomar s_n en lugar de u_n y donde $\alpha = \alpha$, $Q(x) = B_0 + B_1 x$ es un polinomio de primer grado, $\beta = 1$ y $R(x) = C_0$ es una constante]:

$$s_n = [B_0 + B_1 (n-1)]\,\alpha^{n-1} + C_0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Los coeficientes B_0, B_1 y C_0 se determinan del sistema de ecuaciones correspondientes a $n = 1$, 2 y 3:

$$B_0 + C_0 = s_1 = \alpha,$$
$$(B_0 + B_1)\,\alpha + C_0 = s_2 = \alpha + 2\alpha^2,$$
$$(B_0 + 2B_1)\,\alpha^2 + C_0 = s_3 = \alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3,$$

de donde resulta

$$B_0 = \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2}{(\alpha-1)^2}, \quad B_1 = \frac{\alpha^2}{\alpha - 1} \quad \text{y} \quad C_0 = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}.$$

Por consiguiente,

$$s_n = [B_0 + B_1 (n-1)]\,\alpha^{n-1} + C_0 =$$
$$= \frac{n\alpha^{n+2} - (n+1)\,\alpha^{n+1} + \alpha}{(\alpha-1)^2} = \frac{u_n \alpha^2 - (u_{n+1} - u_n)}{(\alpha-1)^2}.$$

CONCLUSION

Este libro tiene como finalidad dar al lector una idea de la diversidad de las sucesiones recurrentes y del papel que desempeñan en las Matemáticas. Al mismo tiempo, hemos mostrado que las sucesiones recurrentes no difieren mucho de las elementales, o sea, de la progresión geométrica y de las sucesiones de potencias de los números naturales (en particular, de la sucesión de los propios números naturales que constituye una progresión aritmética), y pueden ser expresadas mediante estas sucesiones elementales.

Pero ya dentro de la Matemática elemental tropezamos a cada paso con sucesiones no recurrentes. Tal es, por ejemplo, la sucesión de los números primos

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ \ldots,$$

una de las más importantes en las Matemáticas. Esta sucesión y sus profundas y complejas propiedades se estudian en la Teoría de los números.

Tampoco son recurrentes las sucesiones formadas por los valores de muchas funciones elementales como, por ejemplo,

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

(la sucesión de los valores de la función $y = \frac{1}{x}$ para $x = 1, 2, 3, \ldots$) ó

$$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4},\ \ldots,\ \sqrt{n},\ \ldots$$

$$\log 1,\ \log 2,\ \log 3,\ \log 4,\ \ldots,\ \log n,\ \ldots$$

(las sucesiones formadas por los valores de las funciones $\sqrt{x}$ y $\log x$), etc.

Estas sucesiones y otras semejantes [1] (así como las propias sucesiones recurrentes) se estudian en la disciplina matemática ya mencionada: el Cálculo de diferencias finitas.

---

[1] Se trata de las sucesiones formadas por los valores de las llamadas funciones analíticas cuyos representantes más simples son las funciones elementales.

Finalmente, en la Matemática elemental y muy especialmente en el Análisis matemático, que se estudia en la Escuela superior, desempeñan un papel primordial las sucesiones convergentes, o sea, las sucesiones que tienen límite finito. El estudio de estas sucesiones constituye una de las tareas principales de la Teoría de los límites y es parte de los fundamentos del Análisis matemático. Con la particularidad de que las propiedades mismas de los términos de estas sucesiones desempeñan un papel secundario: lo que importa es la existencia del límite y su valor.

Consideramos indispensable hacer estas observaciones para dejar claro ante el lector que la teoría expuesta de las sucesiones recurrentes, tanto desde el punto de vista de su contenido como desde el punto de vista de las leyes que descubre, es sólo un capítulo muy particular y modesto de la Teoría de las sucesiones.

«Lecciones populares de matemáticas» es una colección que se inició en 1950 y lleva publicados hasta el momento 52 folletos. Escritas por matemáticos soviéticos famosos, tanto por su labor docente como por su obra científica, dedicadas a temas interesantes de Matemáticas Elementales o intermedios entre ésta y la Matemática Superior, expuestas en forma clara y precisa, que como regla no exige conocimientos previos especializados, las «Lecciones» están destinadas a un amplio círculo de lectores y pueden compararse a pequeños yates que brindan la posibilidad de realizar, bajo el mando de capitanes expertos, un corto y agradable viaje por el inmenso océano de la ciencia matemática, bien en la proximidad de las costas, bien adentrándose en éste. Al mismo tiempo, las «Lecciones» estimulan en el lector el don del razonamiento lógico y la aptitud de descubrir relaciones entre fenómenos aparentemente muy alejados, familiarizándole con los elementos principales de la cultura matemática. Por todo ello, las «Lecciones», destinadas en un principio a los alumnos de los grados superiores de la enseñanza media, pueden ser recomenadas también a los estudiantes de cualquier especialidad y no dejan de tener interés para los maestros y profesionales.

Nuestro lector habrá podido apreciar el estilo, el contenido y el valor pedagógico de esta colección por los folletos que ha publicado ya nuestra Editorial

MIR PUBLICA:

Boltianski V

¿QUÉ ES EL CÁLCULO DIFERENCIAL?

EL propósito del autor es explicar (de forma comprensible para los alumnos que cursan los últimos años de la enseñanza media) ciertos conceptos de las matemáticas superiores, como son los de derivada, ecuación diferencial, número e, logaritmo natural (lo corriente es que los alumnos se enteren de estos dos últimos conceptos y se interesen por ellos). El autor ha procurado que las explicaciones de estos conceptos sean lo más claras posible, basándose para ello en la resolución de problemas tomados de la física. Al proceder así, además del deseo de lograr la claridad antedicha, le ha guiado el de mostrar que los conceptos de las matemáticas "superiores" son el reflejo matemático de las propiedades de procesos reales que ocurren en la naturaleza y demostrar una vez más que las matemáticas están ligadas a la vida, y no al margen de ella, que se desarrollan y no son una ciencia acabada e invariable. No todas las demostraciones y razonamientos contenidos en el libro se hacen con absoluta rigurosidad matemática. Algunos de estos razonamientos tienen carácter de aclaraciones.

Esta obrita puede utilizarse en el trabajo de los círculos matemáticos y físicos de las escuelas e institutos de segunda enseñanza: para su comprensión bastan los conocimientos que se adquieren en los primeros nueve cursos de las escuelas de enseñanza media.

MIR PUBLICA:

Boltianski V.

FIGURAS EQUIVALENTES Y EQUICOMPUESTAS

El folleto del Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas V. Boltianski trata el estudio de algunas cuestiones, vinculadas con la equicomposición de figuras.

El mismo se divide en dos capítulos, en el primero de los cuales se consideran los polígonos, y en el segundo los poliedros. En el primer capítulo uno de los principales teoremas es el de Bolyai–Guervin. En el segundo capítulo el teorema más interesante es el de Dehn.

Los cuatro primeros parágrafos son los más sencillos. Por su parte, ellos tratan un círculo único de cuestiones, vinculadas con la medida de superficies poligonales. En orden creciente de complejidad le siguen el quinto parágrafo y el comienzo del sexto; ellos requieren el conocimiento de casi todo el curso escolar de geometría y el saber razonar lógicamente. Por último, queda, la parte más difícil, dedicada básicamente a los estudiantes de institutos superiores de profesorado y universidades.

El libro se destina a estudiantes de escuelas de enseñanza media y a los universitarios de los primeros cursos.

MIR PUBLICA:

Golovinà L., Yaglom I.

INDUCCION EN LA GEOMETRÍA

Este libro, dirigido a los alumnos de grados superiores, profesores de matemáticas y estudiantes de las facultades de física y matemática de los institutos de pedagogía, tiene puntos de contacto con el libro "Método de inducción matemática" de I. Sominski (Editorial Mir, 1974) y puede ser considerado como su continuación; será de interés especial para los que conocen ya el libro de I. Sominski.

Contiene 37 ejemplos seguidos de la solución detallada y 40 problemas acompañados de breves indicaciones. Está dedicado a diversas aplicaciones del método de inducción matemática para la solución de problemas geométricos. A nuestro parecer, lo más importante en él son los distintos aspectos del método de inducción matemática; algunos (no todos, por supuesto) ejemplos y problemas pueden también representar interés por sí mismos.

Este trabajo puede utilizarse en el trabajo del círculo matemático de la escuela secundaria, así como en forma autodidacta.

Lecciones populares de matemáticas

Obras de nuestro sello editorial

"Figuras equivalentes y equicompuestas"
de Boltianski V.G.

"¿Qué es el cálculo diferencial?"
de Boltianski V.G.

"Inducción en la geometría"
de Goloviná L.I. y Yaglóm I.M.

"Areas y logaritmos"
de Markushévich A.I.

"El uso de la regla en las construcciones geométricas"
de Smogorzhevski A.S.

Editorial MIR **Moscú**